

УДК 517.53+532.546

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ \mathbb{R} -ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СЛОИСТО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СРЕДЫ В КЛАССЕ КУСОЧНО-МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А.Ю. Казарин

Аннотация

В статье дано решение задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения для слоисто-параллельной $(n+1)$ -фазной среды в классе кусочно-мероморфных функций с заданными главными частями. Решение записано с помощью левого одностороннего интеграла Фурье с известным оригиналом. Помимо этого получены достаточные условия, при выполнении которых интеграл Фурье представим в виде абсолютно сходящегося ряда.

Ключевые слова: слоисто-параллельная среда, задача \mathbb{R} -линейного сопряжения, гетерогенные структуры, теорема Милн-Томсона, мероморфные функции.

Введение

Хорошо известно, что комплексным потенциалом с единственным диполем на бесконечности в случае единичного кругового включения служит, с точностью до мультипликативной константы, функция Жуковского (теорема Милн-Томсона [1, с. 153]), а в прямолинейной слоистой среде потенциалом является кусочно-постоянная функция. В работе [2] последний результат был обобщен на случай произвольного мультиполя в бесконечно удаленной точке. В работе [3, с. 26] теорема Милн-Томсона была обобщена на случай, когда круговым включением возмущается заданный комплексный потенциал с конечным числом произвольно расположенных особых точек. Цель настоящей работы – определение комплексного потенциала в слоисто-параллельной среде в классе кусочно-мероморфных функций с фиксированными главными частями. Перейдем к точной формулировке рассматриваемой задачи.

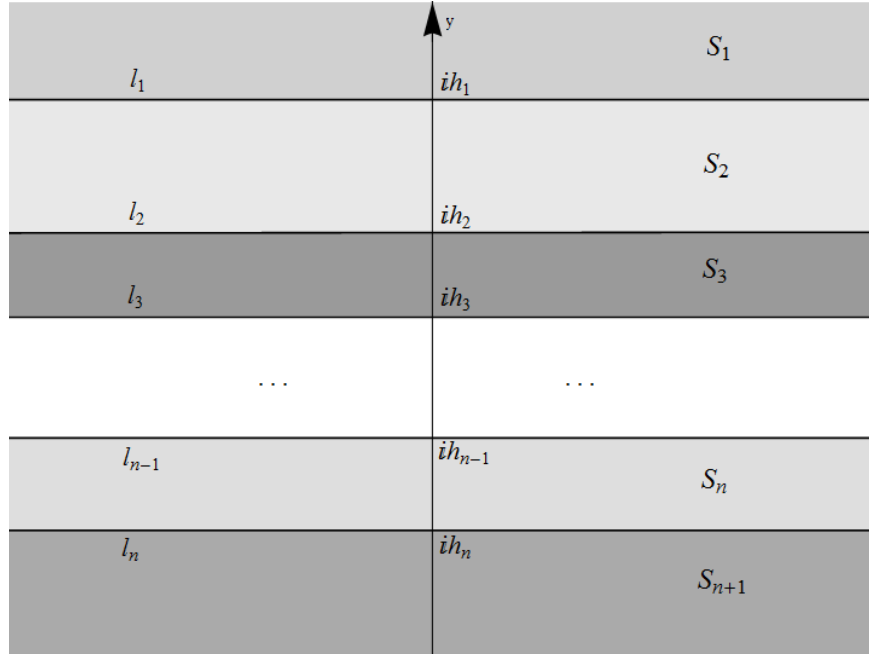
1. Постановка задачи

Рассмотрим среду, состоящую из двух полуплоскостей $S_1 = \{z : \operatorname{Im} z > h_1\}$, $S_{n+1} = \{z : \operatorname{Im} z < h_n\}$ и полос $S_k = \{z : h_{k-1} > \operatorname{Im} z > h_k\}$, $k = 2, \dots, n$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $h_k \in \mathbb{R}$, $h_1 > h_2 > \dots > h_n > 0$ (см. рис. 1).

Требуется построить плоскопараллельное стационарное силовое поле $v(x, y) = (v_x, v_y) = v_p(x, y)$, $(x, y) \in S_p$, $p = 1, \dots, n+1$, соответствующий комплексный потенциал которого имеет фиксированную главную часть $f(z)$ с конечным множеством особых точек $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{n+1}$, $T_p \subset S_p$. Искомое поле является потенциальным и соленоидальным в каждой изотропной фазе S_p всюду, за исключением точек множества T_p :

$$\operatorname{div} v_p(x, y) = 0, \quad \operatorname{rot} v_p(x, y) = 0.$$

На прямых $l_p = \partial S_p \cap \partial S_{p+1}$, разделяющих разнородные фазы S_p и S_{p+1} , предполагаются равными нормальные и касательные составляющие предельных

Рис. 1. $(n - 1)$ полоса и две полуплоскости

значений векторов v_p , v_{p+1} и $\rho_p v_p$, $\rho_{p+1} v_{p+1}$ соответственно:

$$\operatorname{Im}[v_p(t)] = \operatorname{Im}[v_{p+1}(t)], \quad \operatorname{Re}[\rho_p v_p(t)] = \operatorname{Re}[\rho_{p+1} v_{p+1}(t)], \quad (1)$$

где ρ_p — коэффициент, постоянный в фазе S_p , характеризующий физические свойства среды.

Отсюда, учитывая элементарные равенства $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$, $\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/(2i)$, получим следующее эквивалентное краевое условие [4, с. 53]:

$$\begin{aligned} v_p(t) &= A_p v_{p+1}(t) - B_p \overline{v_{p+1}(t)}, \quad t \in l_p, \quad p = 1, \dots, n-1, \\ v_{n+1}(t) &= A_n v_n(t) - B_n \overline{v_n(t)}, \quad t \in l_n, \end{aligned} \quad (2)$$

где функция $v(z)$ комплексно сопряжена с $\bar{v}(z)$, $v(z) = v_p(z) = v_{px}(x, y) - i v_{py}(x, y)$, $z \in S_p$, $p = 1, \dots, n+1$.

Коэффициенты A_p , B_p определяются по формулам

$$\begin{aligned} A_p &= \begin{cases} (\rho_p + \rho_{p+1})/2\rho_p, & p = 1, \dots, n-1, \\ (\rho_{n+1} + \rho_n)/2\rho_{n+1}, & p = n, \end{cases} \\ B_p &= \begin{cases} (\rho_p - \rho_{p+1})/2\rho_p, & p = 1, \dots, n-1, \\ (\rho_{n+1} - \rho_n)/2\rho_{n+1}, & p = n. \end{cases} \end{aligned}$$

В дальнейшем будем обозначать

$$\Delta_p = B_p/A_p, \quad p = 1, \dots, n.$$

2. Решение задачи (2) в классе кусочно-мероморфных функций

Мы предполагаем, что заданная мероморфная функция $F(z) = f'(z)$ не имеет особых точек на линиях l_k и исчезает на бесконечности. Значит, $F(z)$ – рациональная функция, представимая в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n+1} F_k(z),$$

где $F_p(z)$ – сумма простых дробей с полюсами в области S_p .

Кусочно-мероморфное решение $v(z)$ задачи (2) с заданной главной частью $F(z)$ можно представить в следующей форме:

$$v(z) = v_p(z) = F_p(z) + V_p(z), \quad z \in S_p, \quad p = 1, \dots, n+1, \quad (3)$$

где $V_p(z)$ – неизвестная функция, голоморфная в S_p и исчезающая на бесконечности.

Используя представление (3), перепишем краевые условия (2) в виде системы:

$$\begin{cases} F_1(t) + V_1(t) = A_1[F_2(t) + V_2(t)] - B_1[\overline{F_2(t)} + \overline{V_2(t)}], & t \in l_1, \\ F_2(t) + V_2(t) = A_2[F_3(t) + V_3(t)] - B_2[\overline{F_3(t)} + \overline{V_3(t)}], & t \in l_2, \\ \dots & \dots \\ F_{n-1}(t) + V_{n-1}(t) = A_{n-1}[F_n(t) + V_n(t)] - B_{n-1}[\overline{F_n(t)} + \overline{V_n(t)}], & t \in l_{n-1}, \\ F_{n+1}(t) + V_{n+1}(t) = A_n[F_n(t) + V_n(t)] - B_n[\overline{F_n(t)} + \overline{V_n(t)}], & t \in l_n. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим через S_k^+ и S_k^- соответственно верхнюю и нижнюю полуплоскости, ограниченные прямой l_k , $k = 1, \dots, n$. Функции $V_p(z)$, $p = 2, \dots, n$ представим в виде суммы исчезающих на бесконечности слагаемых:

$$V_p(z) = V_p^+(z) + V_p^-(z), \quad (5)$$

где $V_p^+(z)$ и $V_p^-(z)$ – функции, голоморфные в областях S_p^+ и S_{p-1}^- соответственно.

Рассмотрим совокупность функций

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \begin{cases} -V_1(z) + A_1[F_2(z) + V_2^+(z)] - B_1\overline{V_2^-(z_1)}, & z \in S_1^+, \\ F_1(z) - A_1V_2^-(z) + B_1[\overline{F_2(z_1)} + \overline{V_2^+(z_1)}], & z \in S_1^-, \end{cases} \\ \Phi_2 &= \begin{cases} -V_2^+(z) + A_2[F_3(z) + V_3^+(z)] - B_2\overline{V_3^-(z_2)}, & z \in S_2^+, \\ F_2(z) + V_2^-(z) - A_2V_3^-(z) + B_2[\overline{F_3(z_2)} + \overline{V_3^+(z_2)}], & z \in S_2^-, \end{cases} \\ &\dots \\ \Phi_{n-1} &= \begin{cases} -V_{n-1}^+(z) + A_{n-1}[F_n(z) + V_n^+(z)] - B_{n-1}\overline{V_n^-(z_{n-1})}, & z \in S_{n-1}^+, \\ F_{n-1}(z) + V_{n-1}^-(z) - A_{n-1}V_n^-(z) + B_{n-1}[\overline{F_n(z_{n-1})} + \overline{V_n^+(z_{n-1})}], & z \in S_{n-1}^-, \end{cases} \\ \Phi_n &= \begin{cases} F_{n+1}(z) - A_nV_n^+(z) + B_n\overline{V_n^-(z_n)} + B_n\overline{F_n(z_n)}, & z \in S_n^+, \\ A_nF_n(z) - V_{n+1}(z) + A_nV_n^-(z) - B_n\overline{V_n^+(z_n)}, & z \in S_n^-, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

где $z_k = \bar{z} + 2ih_k$ – точка, симметричная с точкой z относительно прямой l_k .

Функции Φ_k , $k = 1, \dots, n$, голоморфны в полуплоскостях S_k^\pm , а в силу условий (4) они непрерывны на линиях сопряжения этих полуплоскостей l_k . Следовательно, функции Φ_k голоморфны во всей комплексной плоскости и, очевидно,

исчезают на бесконечности ($V_k^\pm(\infty) = 0$, $F_k(\infty) = 0$). По теореме Лиувилля все они тождественно равны нулю. Учитывая сказанное, с помощью (6) составим систему для нахождения искомых функций:

$$\begin{cases} V_1(z) = A_1[F_2(z) + V_2^+(z)] - B_1\overline{V_2^-(z_1)}, & z \in S_1^+, \\ V_2^-(z) = A_1^{-1}(F_1(z) + B_1[\overline{F_2(z_1)} + \overline{V_2^+(z_1)}]), & z \in S_1^-, \\ V_2^+(z) = A_2[F_3(z) + V_3^+(z)] - B_2\overline{V_3^-(z_2)}, & z \in S_2^+, \\ V_2^-(z) = A_2V_3^-(z) - F_2(z) - B_2[\overline{F_3(z_2)} + \overline{V_3^+(z_2)}], & z \in S_2^-, \\ \dots & \dots \\ V_k^+(z) = A_k[F_{k+1}(z) + V_{k+1}^+(z)] - B_k\overline{V_{k+1}^-(z_k)}, & z \in S_k^+, \\ V_k^-(z) = A_kV_{k+1}^-(z) - F_k(z) - B_k[\overline{F_{k+1}(z_k)} + \overline{V_{k+1}^+(z_k)}], & z \in S_k^-, \\ \dots & \dots \\ V_{n-1}^+(z) = A_{n-1}[F_n(z) + V_n^+(z)] - B_{n-1}\overline{V_n^-(z_{n-1})}, & z \in S_{n-1}^+, \\ V_{n-1}^-(z) = A_{n-1}V_n^-(z) - F_{n-1}(z) - B_{n-1}[\overline{F_n(z_{n-1})} + \overline{V_n^+(z_{n-1})}], & z \in S_{n-1}^-, \\ V_n^+(z) = A_n^{-1}(F_{n+1}(z) + B_n[\overline{F_n(z_n)} + \overline{V_n^-(z_n)}]), & z \in S_n^+, \\ V_{n+1}(z) = A_n[F_n(z) + V_n^-(z)] - B_n\overline{V_n^+(z_n)}, & z \in S_n^-. \end{cases} \quad (7)$$

Обозначим через P_j оператор, определенный по формуле

$$P_j V(z) = \begin{cases} -\Delta_j V(z_j), & m = 2l, \quad j_m \neq n, \\ \Delta_j V(z_j), & m = 2l, \quad j_m = n, \\ \Delta_j \overline{V(z_j)}, & m = 2l + 1, \end{cases} \quad (8)$$

где j – упорядоченный мультииндекс размерности m : $j = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$,

$$\Delta_j = \prod_{k=1}^m \Delta_{j_k},$$

z_j – образ точки z при ее последовательных симметриях относительно прямых $l_{j_1}, l_{j_2}, \dots, l_{j_m}$:

$$z_j = \begin{cases} lrz + 2i \sum_{l=1}^m (-1)^l h_{j_l}, & m = 2k, \\ \bar{z} + 2i \sum_{l=1}^m (-1)^{l+1} h_{j_l}, & m = 2k + 1. \end{cases}$$

Ниже, наряду с обозначениями P_j , z_j , Δ_j , будут использоваться следующие: $P_{j_1 j_2 \dots j_m}$, $z_{j_1 j_2 \dots j_m}$, $\Delta_{j_1 j_2 \dots j_m}$.

Рассмотрим случай, когда все особенности $f(z)$ сосредоточены в области S_k , $k < n$, то есть $F(z) = F_k(z)$, а $F_i(z) \equiv 0$, $i = 1, \dots, n+1$, $i \neq k$. Последовательно исключим из системы (7) функции $V_n^+(z)$, $V_{n-1}^-(z)$, $V_{n-1}^+(z)$, \dots , $V_2^-(z)$, $V_2^+(z)$, начиная с предпоследнего уравнения. Имеем

$$V_{n-1}^-(z) = A_{n-1}V_n^-(z) - B_{n-1}\Delta_n V_n^-(z_{n-1}).$$

$$V_{n-1}^+(z) = A_{n-1}\Delta_n \overline{V_n^-(z_n)} - B_{n-1}\overline{V_n^-(z_{n-1})}.$$

Далее

$$\begin{aligned} V_{n-2}^-(z) &= A_{n-2}A_{n-1}V_n^-(z) - A_{n-2}B_{n-1}\Delta_n V_n^-(z_{n-1}) - \\ &\quad - B_{n-2}A_{n-1}\Delta_n V_n^-(z_{n-2}) + B_{n-2}B_{n-1}V_n^-(z_{n-2n-1}), \end{aligned}$$

$$V_{n-2}^+(z) = A_{n-2}A_{n-1}\Delta_n \overline{V_n^-(z_n)} - A_{n-2}B_{n-1} \overline{V_n^-(z_{n-1})} - \\ - B_{n-2}A_{n-1} \overline{V_n^-(z_{n-2})} + B_{n-2}B_{n-1}\Delta_n \overline{V_n^-(z_{n-2}n-1n)}.$$

В итоге для $V_{k+1}^-(z)$, $V_{k+1}^+(z)$ получим представления

$$V_{k+1}^-(z) = \prod_{i=k+1}^{n-1} A_i \left(V_n^-(z) - \sum_{\substack{\mathbf{j}_l \in \{k+1, \dots, n\} \\ \dim(\mathbf{j})=2s \\ 1 \leq s \leq [(n-k)/2]}} P_{\mathbf{j}} V_n^-(z) \right), \\ V_{k+1}^+(z) = \prod_{i=k+1}^{n-1} A_i \sum_{\substack{\mathbf{j}_l \in \{k+1, \dots, n\} \\ \dim(\mathbf{j})=2s-1 \\ 1 \leq s \leq [(n-k+1)/2]}} P_{\mathbf{j}} V_n^-(z),$$

где $[r]$ — целая часть числа r .

Исключая функции $V_k^-(z)$ и $V_k^+(z)$ из $(2k-1)$ -го и $2k$ -го уравнений системы (7), получим:

$$V_{k-1}^-(z) = A_{k-1}A_k V_{k+1}^-(z) - A_{k-1}F_k(z) - A_{k-1}B_k \overline{V_{k+1}^+(z_k)} - \\ - B_{k-1} \overline{F_k(z_{k-1})} - B_{k-1}A_k \overline{V_{k+1}^+(z_{k-1})} + B_{k-1}B_k V_{k+1}^-(z_{k-1}k),$$

$$V_{k-1}^+(z) = A_{k-1}F_k(z) + A_{k-1}A_k V_{k+1}^+(z) - A_{k-1}B_k \overline{V_{k+1}^-(z_k)} - \\ - B_{k-1}A_k \overline{V_{k+1}^-(z_{k-1})} + B_{k-1} \overline{F_k(z_{k-1})} + B_{k-1}B_k V_{k+1}^+(z_{k-1}k).$$

На следующем шаге найдем

$$V_{k-2}^-(z) = A_{k-2}A_{k-1}A_k V_{k+1}^-(z) - A_{k-2}A_{k-1}F_k(z) - \\ - A_{k-2}A_{k-1}B_k \overline{V_{k+1}^+(z_k)} - A_{k-2}B_{k-1} \overline{F_k(z_{k-1})} - A_{k-2}B_{k-1}A_k \overline{V_{k+1}^+(z_{k-1})} + \\ + A_{k-2}B_{k-1}B_k V_{k+1}^-(z_{k-1}k) - B_{k-2}A_{k-1} \overline{F_k(z_{k-2})} - B_{k-2}A_{k-1}A_k \overline{V_{k+1}^+(z_{k-2})} + \\ + B_{k-2}A_{k-1}B_k V_{k+1}^-(z_{k-2}k) + B_{k-2}B_{k-1}A_k V_{k+1}^-(z_{k-2}k-1) - \\ - B_{k-2}B_{k-1}F_k(z_{k-2}k-1) - B_{k-2}B_{k-1}B_k \overline{V_{k+1}^+(z_{k-2}k-1k)},$$

$$V_{k-2}^+(z) = A_{k-2}A_{k-1}F_k(z) + A_{k-2}A_{k-1}A_k V_{k+1}^+(z) - \\ - A_{k-2}A_{k-1}B_k \overline{V_{k+1}^-(z_k)} - A_{k-2}B_{k-1}A_k \overline{V_{k+1}^-(z_{k-1})} + A_{k-2}B_{k-1} \overline{F_k(z_{k-1})} + \\ + A_{k-2}B_{k-1}B_k V_{k+1}^+(z_{k-1}k) - B_{k-2}A_{k-1}A_k \overline{V_{k+1}^-(z_{k-2})} + B_{k-2}A_{k-1} \overline{F_k(z_{k-2})} - \\ - A_{k-1}B_k V_{k+1}^+(z_{k-2}k) + B_{k-2}B_{k-1}F_k(z_{k-2}k-1) + B_{k-2}B_{k-1}A_k V_{k+1}^+(z_{k-2}k-1) - \\ - B_{k-2}B_{k-1}B_k \overline{V_{k+1}^-(z_{k-2}k-1k)}.$$

Продолжая последовательно процесс исключения, дойдем до второго уравнения системы (7) и получим функциональное уравнение относительно $V_n^-(z)$

$$V_n^-(z) = \mathbf{P}V_n^-(z) + F_0(z), \quad (9)$$

где $\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} P_{\mathbf{j}_k}$, \mathbf{j}_k – мультииндексы четных размерностей,

$$F_0(z) = \sum_{\substack{\forall \mathbf{j}: \mathbf{j}_l \in \{1, \dots, k-1\} \\ \dim(\mathbf{j}) < k}} \frac{P_{\mathbf{j}} F_k(z)}{\prod_{i=k}^{n-1} A_i}.$$

В общем случае, когда

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n+1} F_k(z),$$

получим функциональное уравнение (9), где для $F_0(z)$ справедливо представление:

$$\begin{aligned} F_0(z) = & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{\forall \mathbf{j}: \mathbf{j}_l \in \{1, \dots, k-1\} \\ \dim(\mathbf{j}) < k}} \frac{P_{\mathbf{j}} F_k(z)}{\prod_{i=k}^{n-1} A_i} + \sum_{\substack{\mathbf{j}_l \in \{1, \dots, n\}, j_{2s}=n \\ \dim(\mathbf{j})=2s \\ 1 \leq s \leq [n/2]}} P_{\mathbf{j}} F_n(z) + \\ & + \sum_{\substack{\mathbf{j}_l \in \{1, \dots, n-1\} \\ \dim(\mathbf{j})=2s-1 \\ 1 \leq s \leq [n/2]}} P_{\mathbf{j}} F_n(z) + A_n^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{j}_l \in \{1, \dots, n-1\} \\ \dim(\mathbf{j})=2s-1 \\ 1 \leq s \leq [n/2]}} P_{\mathbf{j}} F_{n+1}(z). \end{aligned}$$

В функциональном уравнении (9) все функции голоморфны в полуплоскости S_{n-1}^- . Осуществив замену z на $z + ih_{n-1}$, получим уравнение, где все функции голоморфны ниже действительной оси, поэтому их можно представить в виде левого одностороннего интеграла Фурье [5, с. 24] с оригиналом $v_n^-(t)$,

$$V_n^-(z + ih_{n-1}) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 v_n^-(t) e^{izt} dt.$$

Запишем представление для искомой функции

$$V_n^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 v_n^-(t) e^{i(z - ih_{n-1})t} dt. \quad (10)$$

Отсюда, так как оператор \mathbf{P} линеен, получим

$$\mathbf{P} V_n^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 v_n^-(t) \mathbf{P} e^{i(z - ih_{n-1})t} dt.$$

Пусть

$$F_0(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f_0^*(t) e^{i(z - ih_{n-1})t} dt,$$

где $f_0^*(t) = f_0(t) e^{-h_{n-1}t}$, $f_0(t)$ – оригинал известной рациональной функции $F_0(z)$.

С помощью полученных представлений перепишем функциональное уравнение (9) в виде

$$\int_{-\infty}^0 v_n^-(t) e^{i(z - ih_{n-1})t} dt - \int_{-\infty}^0 v_n^-(t) \mathbf{P} e^{i(z - ih_{n-1})t} dt = \int_{-\infty}^0 f_0^*(t) e^{i(z - ih_{n-1})t} dt.$$

Найдя из этого равенства оригинал $v_n^-(t)$ и подставив его в представление (10) для $V_n^-(z)$, получим

$$V_n^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_0(t)e^{izt} dt}{1 - e^{-izt}(\mathbf{P}e^{izt})}. \quad (11)$$

Здесь под $e^{-izt}(\mathbf{P}e^{izt})$ подразумевается сумма

$$e^{-izt}(\mathbf{P}e^{izt}) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \Delta_{j_k} e^{it(z_{j_k}-z)}.$$

Отметим, что при выполнении условия

$$|e^{-izt}(\mathbf{P}e^{izt})| < 1, \quad t < 0, \quad (12)$$

функцию $(1 - e^{-izt}(\mathbf{P}e^{izt}))^{-1}$ можно разложить в абсолютно сходящийся ряд по степеням $e^{-izt}(\mathbf{P}e^{izt})$ и получить решение (11) в замкнутой форме в виде сходящегося ряда:

$$V_n^-(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}^k F_0(z).$$

Однако в общем случае получить необходимые и достаточные условия, обеспечивающие выполнение условия (12), не представляется возможным.

Рассмотрим некоторые частные случаи. В случае одной полосы ($n = 2$) система (7) примет вид:

$$\begin{cases} V_1(z) = A_1[F_2(z) + V^+_{-2}(z)] - B_1 \overline{V^-_{-2}(z_1)}, & z \in S_1^+, \\ V^-_{-2}(z) = A_1^{-1}(F_1(z) + B_1[\overline{F_2(z_1)} + \overline{V^+_{-2}(z_1)}]), & z \in S_1^-, \\ V^+_{-2}(z) = A_2^{-1}(F_3(z) + B_2[\overline{F_2(z_2)} + \overline{V^-_{-2}(z_2)}]), & z \in S_2^+, \\ V_3(z) = A_2[F_2(z) + V^-_{-2}(z)] - B_2 \overline{V^+_{-2}(z_2)}, & z \in S_2^-. \end{cases} \quad (13)$$

Функциональное уравнение (9) в этом случае выглядит наиболее просто:

$$V_2^-(z) = P_{12}V_2^-(z) + F_0(z), \quad (14)$$

где

$$F_0(z) = \frac{F_1(z)}{A_1} + \Delta_1 \overline{F_2(z_1)} + \Delta_{12} F_2(z + 2i(h_2 - h_1)) + \frac{\Delta_1 \overline{F_3(z_1)}}{A_2}.$$

Ясно, что функция $F_0(z)$ голоморфна в области S_1^- .

На основании (11) с помощью левого одностороннего интеграла Фурье получим искомое представление:

$$V_2^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_0(t)e^{izt} dt}{1 - \Delta_{12} e^{2t(h_1 - h_2)}}. \quad (15)$$

Примеры оригиналов $f_0(t)$ от простейших рациональных функций хорошо известны [5, с. 26–27]. Например, если

$$F_0(z) = \frac{Q(z)}{\prod_{j=1}^l (z - a_j)^{k_j}}, \quad \operatorname{Im} a_j > 0,$$

то

$$f_0(t) = \sum_{j=1}^l q_j(t) e^{-ia_j t},$$

где $q_j(t)$ – многочлены степеней $k_j - 1$.

Для оригинала $f_0(t)$, не уменьшая общности, достаточно рассмотреть случай единственной особой точки $l = 1$, тогда

$$f_0(t) = \frac{(-i)^{k_1} \sqrt{2\pi}}{(k_1 - 1)!} t^{k_1 - 1} e^{-iat}.$$

Так как $|\Delta_{12}| < 1$ и разность $h_1 - h_2$ положительна, то $|\Delta_{12} e^{2t(h_1 - h_2)}| < 1$ для $t < 0$. Таким образом, величина $(1 - \Delta_{12} e^{2t(h_1 - h_2)})^{-1}$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\Delta_{12} e^{2t(h_1 - h_2)}$. Представление (15) примет вид

$$\begin{aligned} V_2^-(z) &= -\frac{(-i)^{k_1}}{(k_1 - 1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{12}^k \int_{-\infty}^0 t^{k_1 - 1} e^{t(i(z-a) + 2k(h_1 - h_2))} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k_1 + 1} \Delta_{12}^k}{((z - a) - 2ki(h_1 - h_2))^{k_1}}. \end{aligned} \quad (16)$$

В общем случае произвольного оригинала $f_0(z)$ решением будет ряд

$$V_2^-(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{12}^k F_0(z). \quad (17)$$

К решению (17) можно прийти другим способом, а именно: применяя к обеим частям равенства (14) оператор P_{12} , получим $P_{12} V_2^-(z) = P_{12}^2 V_2^-(z) + P_{12} F_0(z)$. Заменим в уравнении (14) слагаемое $P_{12} V_2^-(z)$ на найденное выражение:

$$V_2^-(z) = P_{12}^2 V_2^-(z) + P_{12} F_0(z) + F_0(z). \quad (18)$$

Теперь к (14) применим оператор P_{12}^2 и в (18) заменим соответствующее слагаемое, тогда

$$V_2^-(z) = P_{12}^3 V_2^-(z) + P_{12}^2 F_0(z) + P_{12} F_0(z) + F_0(z).$$

Продолжая этот процесс, на j -м шаге получим

$$V_2^-(z) = P_{12}^{j+1} V_2^-(z) + \sum_{k=0}^j P_{12}^k F_0(z).$$

Устремляя j к бесконечности, в силу ограниченности функции $V_2^-(z)$ и того, что $|\Delta_{12}|^j \rightarrow 0$, приходим к решению (17).

Далее, из системы (13) с помощью (17) последовательно определяются $V_2^+(z)$, $V_1(z)$, $V_3(z)$. Подставив найденные функции в представление (3), получим искомое решение:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= F_1(z) + A_1 F_2(z) - B_1 \sum_{k=0}^{\infty} P_{12}^k \overline{F_0(z_1)} + \\ &+ \frac{A_1}{A_2} \left(F_3(z) + B_2 \left[\overline{F_2(z_2)} + \sum_{k=0}^{\infty} P_{12}^k \overline{F_0(z_2)} \right] \right), \end{aligned}$$

$$v_2(z) = F_2(z) + \sum_{k=0}^{\infty} P_{12}^k F_0(z) + \frac{1}{A_2} \left(F_3(z) + B_2 \left[\overline{F_2(z_2)} + \sum_{k=0}^{\infty} P_{12}^k \overline{F_0(z_2)} \right] \right),$$

$$v_3(z) = F_3(z) - \Delta_2 \overline{F_3(z_2)} + (A_2 - B_2 \Delta_2) \left[F_2(z) + \sum_{k=0}^{\infty} P_{12}^k F_0(z) \right].$$

Рассмотрим случай двух полос ($n = 3$). Запишем систему (7) для данного случая:

$$\begin{cases} V_1(z) = A_1[F_2(z) + V^+_{-2}(z)] - B_1 \overline{V^-_{-2}(z_1)}, & z \in S_1^+, \\ V^-_{-2}(z) = A_1^{-1}(F_1(z) + B_1[\overline{F_2(z_1)} + \overline{V^+_{-2}(z_1)}]), & z \in S_1^-, \\ V^+_{-2}(z) = A_2[F_3(z) + V_3^+(z)] - B_2 \overline{V_3^-(z_2)}, & z \in S_2^+, \\ V_2^-(z) = A_2 V_3^-(z) - F_2(z) - B_2[\overline{F_3(z_2)} + \overline{V_3^+(z_2)}], & z \in S_2^-, \\ V^+_{-3}(z) = A_3^{-1}(F_4(z) + B_3[\overline{F_3(z_3)} + \overline{V^-_{-3}(z_3)}]), & z \in S_3^+, \\ V_4(z) = A_3[F_3(z) + V_3^-(z)] - B_3 \overline{V_3^+(z_3)}, & z \in S_3^-. \end{cases} \quad (19)$$

Уравнение (9) примет вид

$$V_3^-(z) = (P_{13} + P_{12} + P_{23})V_3^-(z) + F_0(z), \quad (20)$$

где

$$F_0(z) = \frac{F_1(z)}{A_1 A_2} + \frac{F_2(z)}{A_2} + \frac{\Delta_1 \overline{F_2(z_1)}}{A_2} + \Delta_1 \overline{F_3(z_1)} + \Delta_2 \overline{F_3(z_2)} + \\ + \Delta_{23} F_3(z_{23}) + \Delta_{13} F_3(z_{13}) + \frac{\Delta_1 \overline{F_4(z_1)}}{A_3} + \frac{\Delta_2 \overline{F_4(z_2)}}{A_3}. \quad (21)$$

Решение (11) выглядит следующим образом:

$$V_3^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_0(t) e^{izt} dt}{1 - \Delta_{13} e^{2t(h_1 - h_3)} + \Delta_{12} e^{2t(h_1 - h_2)} - \Delta_{23} e^{2t(h_2 - h_3)}}. \quad (22)$$

Если $|\Delta_{13} e^{2t(h_1 - h_3)} - \Delta_{12} e^{2t(h_1 - h_2)} + \Delta_{23} e^{2t(h_2 - h_3)}| < 1$, то решение получаем в виде абсолютно сходящегося ряда

$$V_3^-(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}^k F_0(z), \quad (23)$$

где $\mathbf{P} = P_{13} + P_{12} + P_{23}$.

Рассмотрим случай полос равной ширины, тогда $h_1 - h_2 = h_2 - h_3 = h$ и (22) можно упростить:

$$V_3^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_0(t) e^{izt} dt}{1 - \Delta_{13} e^{4th} + (\Delta_{12} - \Delta_{23}) e^{2th}}. \quad (24)$$

Знаменатель подынтегрального выражения в (24) есть квадратный полином относительно e^{2th} , его корнями являются

$$t_{1,2} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{23} \pm \sqrt{(\Delta_{12} - \Delta_{23})^2 + 4\Delta_{13}}}{2\Delta_{13}}.$$

Покажем, что оба эти корня по модулю не меньше единицы, что обеспечит выполнение условия (12). Действительно, если дискриминант отрицательный, то $t_1 = \overline{t_2}$, а по формулам Виета $|t_1 t_2| = |1/\Delta_{13}| > 1$. В случае положительного дискриминанта рассмотрим функции

$$f^{\pm}(x, y, z) = \frac{xy - yz \pm \sqrt{(xy - yz)^2 + 4xz}}{2xz},$$

где $x = \Delta_1$, $y = \Delta_2$, $z = \Delta_3$. С помощью процедуры NMinimize в пакете Mathematica получаем, что в кубе $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$ справедлива оценка $|f^{\pm}(x, y, z)| \geq 1$.

Подынтегральное выражение в (24) представим в виде суммы и разобьем интеграл на два:

$$V_3^-(z) = -\frac{\Delta_{13}^{-1}}{(t_2 - t_1)\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{t_1} \int_{-\infty}^0 \frac{f_0(t)e^{izt} dt}{(1 - e^{2th}/t_1)} - \frac{1}{t_2} \int_{-\infty}^0 \frac{f_0(t)e^{izt} dt}{(1 - e^{2th}/t_2)} \right). \quad (25)$$

Так как $|t_1|$ и $|t_2|$ не меньше единицы и $h > 0$, а $t < 0$, $(1 - e^{2th}/t_1)^{-1}$, $(1 - e^{2th}/t_2)^{-1}$ – суммы геометрических прогрессий. В силу абсолютной сходимости этих прогрессий меняем порядок суммирования и интегрирования:

$$V_3^-(z) = \frac{\Delta_{13}^{-1}}{(t_1 - t_2)\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{t_1^{k+1}} - \frac{1}{t_2^{k+1}} \right) \int_{-\infty}^0 f_0(t)e^{2tkh+izt} dt \right). \quad (26)$$

В случае единственной особой точки первого порядка у $F(z)$ в точке $z = a$ оригинал имеет вид $f_0(t) = i\sqrt{2\pi}e^{-iat}$. В этом случае получим решение

$$V_3^-(z) = \frac{\Delta_{13}^{-1}}{(t_1 - t_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{t_1^{k+1}} - \frac{1}{t_2^{k+1}} \right) \frac{1}{(z - a) - 2ikh} \right).$$

Далее, из системы (19) последовательно находятся $V_3^+(z)$, $V_2^-(z)$, $V_2^+(z)$, $V_1(z)$, $V_4(z)$, подставляя их в представление (3), получим искомое решение.

3. Примеры

1. Рассмотрим случай одной полосы. Пусть $f(z) = -1/(z - 2.5i)$, $h_1 = 4$, $h_2 = 1$, функция $F_0(z)$ имеет вид:

$$F_0(z) = \frac{\Delta_1}{(z - 5.5i)^2} + \frac{\Delta_{12}}{(z - 8.5i)^2}.$$

Примеры полей для диполя в точке $2.5i$ представлены на рис. 2.

2. Рассмотрим случай двух полос. Пусть $f(z) = 2\ln(z - 5i)$, $h_1 = 6$, $h_2 = 3.5$, $h_3 = 2$, тогда $F_1(z) = 0$, $F_2(z) = 2/(z - 5i)$, $F_3(z) = 0$, $F_4(z) = 0$. Используя (21) найдем:

$$F_0(z) = \frac{2}{A_2(z - 5i)} + \frac{2\Delta_1}{A_2(z - 7i)}.$$

Оригиналом для $F_0(z)$ служит функция

$$f_0(t) = \frac{-2i\sqrt{2\pi}}{A_2}(e^{5t} + \Delta_1 e^{7t}).$$

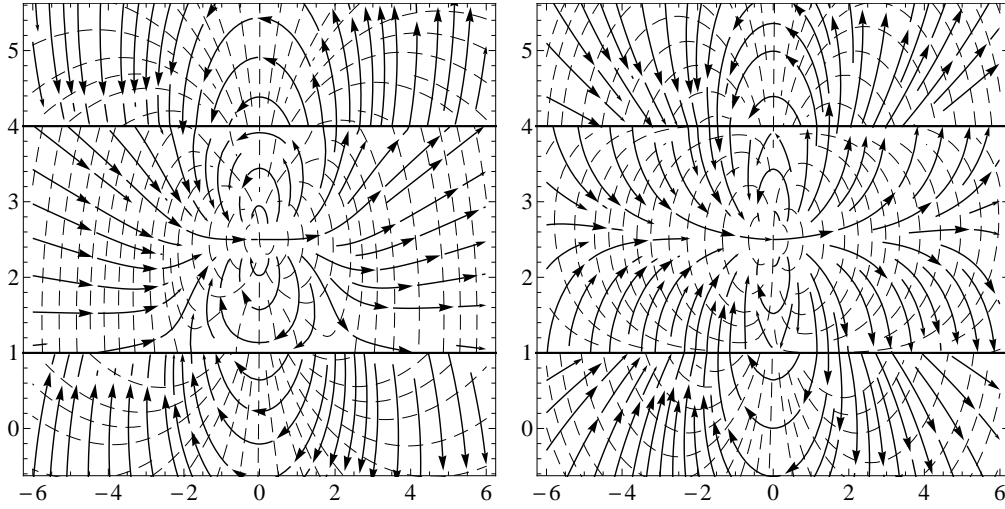


Рис. 2. Диполь интенсивности $\Gamma = 2\pi$: слева для $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.2$, $\rho_3 = 5$ и справа для $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 20$, $\rho_3 = 0.5$

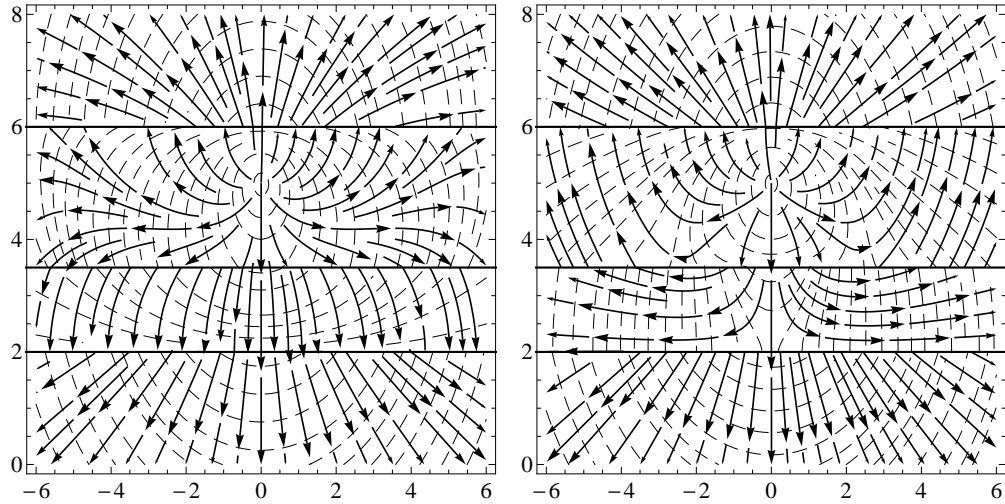


Рис. 3. Источник интенсивности $\Gamma = 4\pi$: слева для $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 20$, $\rho_3 = 50$, $\rho_4 = 0.5$ и справа для $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 20$, $\rho_3 = 0.5$, $\rho_4 = 50$

На основании (22) запишем решение

$$V_3^-(z) = \frac{2i}{A_{12}} \int_{-\infty}^0 \frac{(e^{it(z-5i)} + \Delta_1 e^{it(z-7i)}) dt}{1 - \Delta_1 \Delta_3 e^{8t} + \Delta_1 \Delta_2 e^{5t} - \Delta_2 \Delta_3 e^{3t}}.$$

Примеры полей для источника в точке $5i$ представлены на рис. 3.

3. Пусть $f(z) = (2 + 2i) \ln(z + 2 - 7i) - (1 - i) \ln(z - 2 - i)$, $h_1 = 6$, $h_2 = 4$, $h_3 = 2$, тогда $F_1(z) = (2 - 2i)/(z + 2 - 7i)$, $F_2(z) = 0$, $F_3(z) = 0$, $F_4(z) = (-1 + i)/(z - 2 - i)$. Соотношение (21) имеет вид

$$F_0(z) = \frac{2 - 2i}{A_1 A_2 (z + 2 - 7i)} - \frac{\Delta_1 (1 + i)}{A_3 (z - 2 - 11i)} - \frac{\Delta_2 (1 + i)}{A_3 (z - 2 - 7i)}.$$

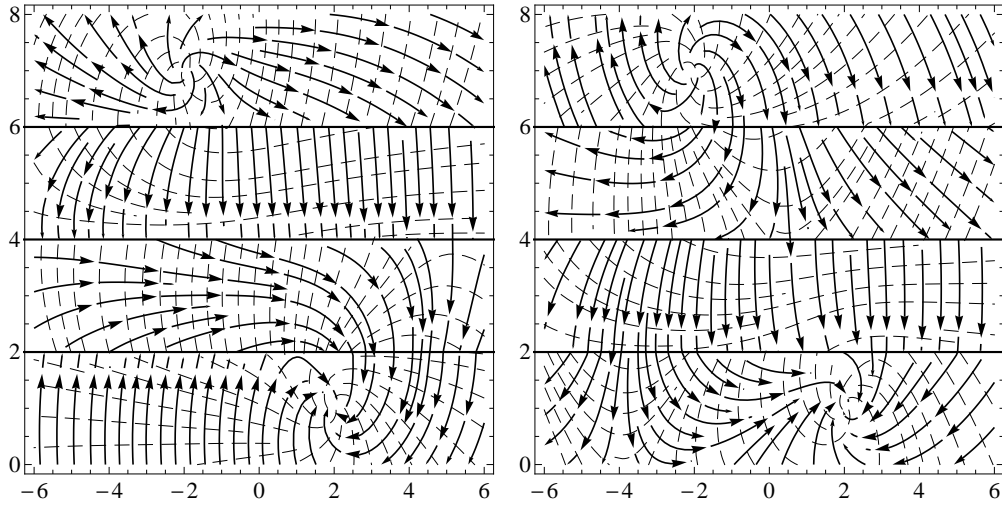


Рис. 4. Вихреисточник мощности $\Gamma = 4\pi$ интенсивности $Q = -4\pi$ и вихресток мощности $\Gamma = -2\pi$ интенсивности $Q = -2\pi$: слева для $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 20$, $\rho_3 = 0.5$, $\rho_4 = 5$ и справа для $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.2$, $\rho_3 = 5$, $\rho_4 = 0.5$

На основании (24) найдем

$$V_3^-(z) = -\frac{2-2i}{A_1 A_2 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{it(z-2+7i)} dt}{1 - \Delta_{13} e^{8t} + (\Delta_{12} - \Delta_{23}) e^{4t}} + \\ + \frac{i+1}{A_3 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta_1 e^{it(z-2-11i)} + \Delta_2 e^{it(z-2-7i)} dt}{1 - \Delta_{13} e^{8t} + (\Delta_{12} - \Delta_{23}) e^{4t}}.$$

Вычислим интеграл в выражении (26) для данного оригинала.

$$V_3^-(z) = \frac{\Delta_{13}^{-1}}{(t_1 - t_2) \sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t_1^{k+1}} - \frac{1}{t_2^{k+1}} \right) \left(\frac{-2-2i}{A_1 A_2 (z-2+7i-4ki)} - \right. \\ \left. - \frac{\Delta_1 (1-i)}{A_3 (z-4ki+2+11i)} - \frac{\Delta_2 (1-i)}{A_3 (z-4ki+2+7i)} \right)$$

Примеры полей для вихреисточника в точке $-2+7i$ и вихресток в точке $2+i$ представлены на рис. 4.

Заключение

В работе получено решение задачи о возмущении заданного комплексного потенциала в бесконечной плоской среде с произвольным числом разнородных параллельных полос. Для случаев одной и двух полос с помощью пакета Mathematica построены линии тока и эквипотенциали соответствующих возмущенных полей. К сожалению, для большего числа полос построение возмущенных полей затруднено, так как кратности рядов, входящих в полученное решение, с увеличением числа полос быстро растут и возможности современных ЭВМ не могут обеспечить получение требуемого результата в разумное время.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-97015-р_поволжье_а).

Summary

A. Yu. Kazarin. Solution of a \mathbb{R} -Linear Conjugation Problem for a Parallel-Layered Medium in the Class of Piecewise Meromorphic Functions.

The problem of \mathbb{R} -linear conjugation for parallel-layered $(n + 1)$ -phase media is solved in the class of piecewise meromorphic functions with given principal parts. The solution is written as a left-sided Fourier integral with a known original. In addition, some sufficient conditions under which the Fourier integral can be represented as an absolutely convergent series are obtained.

Key words: parallel-layered media, \mathbb{R} -linear conjugation problem, heterogeneous structures, Milne-Thomson theorem, piecewise meromorphic functions.

Литература

1. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 655 с.
2. *Обносков Ю.В., Егорова М.А.* Задача \mathbb{R} -линейного сопряжения для софокусного параболического кольца // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 3. – С. 170–178.
3. *Обносков Ю.В.* Краевые задачи теории гетерогенных сред. Многофазные среды, разделенные кривыми второго порядка. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2009. – 205 с.
4. *Емец Ю.П.* Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред. – Киев: Наукова думка, 1987. – 254 с.
5. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

Поступила в редакцию
18.04.12

Казарин Анатолий Юрьевич – аспирант кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: alkidkaz@mail.ru